

Lie-groepen, natuurkunde en meetkunde

Een inleiding voor natuurkundigen, technici en scheikundigen

Dit boek behandelt veel van de belangrijke aspecten van de theorie van Lie-groepen, op een 'al doende leert men'-manier. Het boek concentreert zich niet zozeer op stellingen en bewijzen, maar legt het verband tussen Lie-groepen en vele vakgebieden van de wiskunde en de natuurkunde, en illustreert deze met concrete berekeningen. Het hele boek door worden er tal van voorbeelden van Lie-groepen en Lie-algebra's gegeven, met toepassingen van het materiaal op de natuurwetenschappen en de toegepaste wiskunde. Het verband tussen de theorie van Lie-groepen en algoritmen voor het oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen wordt behandeld en er wordt een analogie gelegd met het verband tussen Galois-groepen en algoritmen voor het oplossen van polynoomvergelijkingen. Andere hoofdstukken zijn gewijd aan differentiaalmeetkunde, relativiteitstheorie, elektrodynamica en het waterstofatoom.

Elk hoofdstuk wordt afgesloten met een reeks vraagstukken, zodat lezers hun inzicht in de materie kunnen testen. Dit is een fascinerende inleiding in Lie-groepen voor bachelor- en masterstudenten in de natuurkunde, wiskunde en elektrotechniek, evenals voor onderzoekers in deze disciplines.

ROBERT GILMORE is hoogleraar aan de faculteit natuurkunde van Drexel University, Philadelphia. Hij is een Fellow van de American Physical Society, en lid van de Standing Committee voor de International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics. Zijn onderzoeksgebieden zijn onder meer groepentheorie, catastrofetheorie, atoom- en kernfysica, singulariteitstheorie en chaostheorie.

Inhoudsopgave

Voorwoord	ix
1 Inleiding	1
1.1 Het programma van Lie	1
1.2 Een resultaat van Galois	2
1.3 Groepentheoretische achtergrond	3
1.4 Methode voor het oplossen van polynoomvergelijkingen	8
1.5 Oplossing van de tweedegraadsvergelijking	9
1.6 Oplossing van de derdegraadsvergelijking	11
1.7 Oplossing van de vierdegraadsvergelijking	13
1.8 De vijfdegraadsvergelijking kan niet worden opgelost	16
1.9 Voorbeeld	16
1.10 Conclusie	20
1.11 Vraagstukken	20
2 Lie-groepen	23
2.1 Algebraïsche eigenschappen	23
2.2 Topologische eigenschappen	24
2.3 Vereniging van algebra en topologie	26
2.4 Onverwachte vereenvoudiging	28
2.5 Conclusie	28
2.6 Vraagstukken	28
3 Matrixgroepen	33
3.1 Voorbereidingen	33
3.2 Geen beperkingen	34
3.3 Lineaire beperkingen	35
3.4 Bilineaire en kwadratische beperkingen	37
3.5 Multilineaire beperkingen	40
3.6 Doorsneden van groepen	41
3.7 Ingebedde groepen	41
3.8 Modulaire groepen	42
3.9 Conclusie	44
3.10 Vraagstukken	44
4 Lie-algebra's	55
4.1 Kan het eenvoudiger?	55
4.2 Hoe is een Lie-groep te lineariseren	56

4.3	Inversie van de linearisatieafbeelding: EXP	57
4.4	Eigenschappen van een Lie-algebra	59
4.5	Structuurconstanten	61
4.6	Reguliere representatie	61
4.7	Structuur van een Lie-algebra	62
4.8	Inproduct	63
4.9	Invariante metriek en maat op een Lie-groep	65
4.10	Conclusie	67
4.11	Vraagstukken	67
5	Matrixalgebra's	73
5.1	Voorbereidingen	73
5.2	Geen beperkingen	73
5.3	Lineaire beperkingen	73
5.4	Bilineaire en kwadratische beperkingen	76
5.5	Multilineaire beperkingen	79
5.6	Doorsneden van groepen	79
5.7	Algebra's van ingebedde groepen	79
5.8	Modulaire groepen	80
5.9	Basisvectoren	80
5.10	Conclusie	81
5.11	Vraagstukken	82
6	Operatoralgebra's	87
6.1	Boson operatoralgebra's	87
6.2	Fermion-operatoralgebra's	88
6.3	Differentiaaloperatoralgebra's van de eerste orde	88
6.4	Conclusie	91
6.5	Vraagstukken	91
7	EXPonentiatie	97
7.1	Voorbereidingen	97
7.2	Het overdekkingsvraagstuk	98
7.3	Het isomorfievraagstuk en de overdekkingsgroep	102
7.4	Het parametrisatievraagstuk en BCH-formules	106
7.5	EXPonentiële functies en natuurkunde	110
7.6	Conclusie	115
7.7	Vraagstukken	116
8	Structuurtheorie voor Lie-algebra's	127
8.1	Reguliere representatie	127
8.2	Enkele standaardvormen voor de reguliere representatie	127
8.3	Betekenis van deze vormen	130
8.4	Uitvoeren van deze ontbinding	132
8.5	Een voorbeeld	133

8.6	Conclusie	134
8.7	Vraagstukken	134
9	Structuurtheorie voor enkelvoudige Lie-algebra's	137
9.1	Doelstellingen van dit programma	137
9.2	Eigenoperatorontbinding - karakteristieke vergelijking	138
9.3	Rang	140
9.4	Invariante operatoren	140
9.5	Reguliere elementen	143
9.6	Halfenkelvoudige Lie-algebra's	144
9.7	Canonieke commutatierelaties	149
9.8	Conclusie	150
9.9	Vraagstukken	151
10	Wortelruimten en Dynkin-diagrammen	157
10.1	Eigenschappen van oplossingen	157
10.2	Wortelruimtediagrammen	158
10.3	Dynkin-diagrammen	163
10.4	Conclusie	167
10.5	Vraagstukken	167
11	Reële vormen	171
11.1	Inleiding	171
11.2	Compacte en minst compacte reële vormen	172
11.3	De procedure van Cartan voor het construeren van reële vormen	174
11.4	Reële vormen van enkelvoudige matrix-Lie-algebra's	176
11.5	Resultaten	179
11.6	Conclusie	179
11.7	Vraagstukken	181
12	Riemannse symmetrische ruimten	187
12.1	Kort overzicht	187
12.2	Globaal symmetrische ruimten	187
12.3	Rang	189
12.4	Riemannse symmetrische ruimten	190
12.5	Metriek en maten	190
12.6	Toepassingen en voorbeelden	192
12.7	Pseudo-Riemannse symmetrische ruimten	194
12.8	Conclusie	195
12.9	Vraagstukken	196
13	Contractie	203
13.1	Inleiding	203
13.2	Inönü-Wigner-contracties	203
13.3	Eenvoudige voorbeelden van Inönü-Wigner-contracties	204

13.4	De contractie $U(2) \rightarrow H_4$	208
13.5	Conclusie	213
13.6	Vraagstukken	213
14	Waterstofatomen	219
14.1	Inleiding	219
14.2	Twee belangrijke natuurkundige principes	220
14.3	De golfvergelijkingen	221
14.4	Kwantiseringsvoorwaarden	222
14.5	Meetkundige symmetrie $SO(3)$	224
14.6	Dynamische symmetrie $SO(4)$	227
14.7	Relatie met dynamica in vier dimensies	230
14.8	DeSitter-symmetrie $SO(4,1)$	231
14.9	Conforme symmetrie $SO(4,2)$	234
14.10	Spinimpulsmoment	239
14.11	Spectrumvoortbrengende groep	241
14.12	Conclusie	244
14.13	Vraagstukken	245
15	De vergelijkingen van Maxwell	255
15.1	Inleiding	255
15.2	Overzicht van de inhomogene lorentzgroep	256
15.3	Ondergroepen en hun representaties	258
15.4	Representaties van de Poincaré-groep	259
15.5	Transformatie-eigenschappen	265
15.6	De vergelijkingen van Maxwell	268
15.7	Conclusie	269
15.8	Vraagstukken	270
16	Lie-groepen en differentiaalvergelijkingen	279
16.1	Het eenvoudigste geval	280
16.2	Vergelijkingen van de eerste orde	281
16.3	Een voorbeeld	285
16.4	Extra inzichten	289
16.5	Conclusie	295
16.6	Vraagstukken	296
	Index	305

1 Inleiding

Lie-groepen werden aanvankelijk geïntroduceerd als een middel voor het oplossen of vereenvoudigen van gewone en partiële differentiaalvergelijkingen. Het model voor deze toepassing was het gebruik door Galois van eindige groepen bij het oplossen van algebraïsche vergelijkingen van de tweede, derde en vierde graad, en bij het aantonen dat de algemene polynoomvergelijking van een graad groter dan vier niet met radicalen kon worden opgelost. In dit hoofdstuk laten we zien hoe de structuur van de eindige groep die een tweede-, derde- of vierdegraadsvergelijking invariant laat, kan worden gebruikt om een oplossingsalgoritme voor die vergelijking op te stellen.

1.1 Het programma van Lie

Marius Sophus Lie (1842-1899) legde de basis voor een programma dat, zelfs na een eeuw van actief onderzoek, nog steeds niet is afgerond. Dit programma probeert de macht van het instrument dat groepentheorie wordt genoemd, te benutten voor het oplossen, of in elk geval vereenvoudigen, van gewone differentiaalvergelijkingen.

Eerder in de negentiende eeuw had Evariste Galois (1811-1832) groepentheorie gebruikt voor het oplossen van algebraïsche (polynoom) vergelijkingen van de tweede, derde en vierde graad. Hij deed zelfs nog meer. Hij slaagde erin te bewijzen dat er voor de algemene vergelijking van vijfde (of hogere) graad geen oplossing in gesloten vorm te construeren was, als uitsluitend de vier standaard rekenkundige bewerkingen (+, −, ·, ÷) en het nemen van de n -de machtswortel uit een complex getal werden gebruikt.

Lie initieerde zijn programma op basis van analogie. Als er eindige groepen nodig waren om uit te maken of polynoomvergelijkingen van eindige graad oplosbaar waren, dan zouden 'oneindige groepen' (d.w.z. groepen die continu van één of meer reële of complexe variabelen afhangen) vermoedelijk een rol spelen bij de behandeling van gewone en partiële differentiaalvergelijkingen. Bovendien wist Lie dat de structuur van de invariantiegroep (Galois-groep) van het polynoom niet alleen bepaalde of de vergelijking in gesloten vorm oplosbaar was, maar tevens het algoritme leverde om als de vergelijking oplosbaar was, de oplossing te construeren. Hierdoor bedacht hij dat de structuur van de invariantiegroep van een gewone differentiaalvergelijking zou bepalen of de vergelijking al dan niet zou kunnen worden opgelost of vereenvoudigd en zo ja, of de structuur van de groep ook het algoritme zou leveren om de oplossing of vereenvoudiging te leveren.

Lie begon dus aan het programma van het berekenen van de invariantiegroep van gewone differentiaalvergelijkingen. Ook begon hij met het bestuderen van zijn geesteskinderen, die we tegenwoordig Lie-groepen noemen.

Lie-groepen zijn er in twee basisvariëteiten: enkelvoudige en oplosbare groepen. Enkelvoudige groepen hebben de eigenschap dat ze onder commutatie regenereren. Oplosbare

groepen doen dat niet, en bevatten een keten van ondergroepen, die elk een invariante ondergroep zijn van hun voorganger.

Enkelvoudige en oplosbare groepen zijn de bouwstenen voor alle andere Lie-groepen. Halfenkelvoudige Lie-groepen zijn directe producten van enkelvoudige Lie-groepen. Niet-halfenkelvoudige Lie-groepen zijn semidirecte producten van halfenkelvoudige of enkelvoudige Lie-groepen met invariante ondergroepen die oplosbaar zijn.

Het is niet verrassend dat er een verband is tussen oplosbare Lie-groepen en de integreerbaarheid, of althans de vereenvoudiging, van gewone differentiaalvergelijkingen. Maar enkelvoudige Lie-groepen zijn aan striktere beperkingen onderhevig, en vormen op zich een dermate schitterend studieonderwerp dat veel van de inspanningen van wiskundigen in de afgelopen eeuw gericht waren op de classificatie en de volledige catalogisering van alle enkelvoudige Lie-groepen en de behandeling van hun eigenschappen. Zelfs nu is er nog geen volledige classificatie van oplosbare Lie-groepen en derhalve ook niet van niet-halfenkelvoudige Lie-groepen.

Zowel enkelvoudige als oplosbare Lie-groepen spelen een belangrijke rol in de studie van differentiaalvergelijkingen. Zoals in het geval van Galois van polynoomvergelijkingen kunnen differentiaalvergelijkingen opgelost of vereenvoudigd worden door kwadratuur als hun invariantiegroep oplosbaar is. Anderzijds zijn de meeste klassieke functies uit de mathematische fysica matrixelementen van enkelvoudige Lie-groepen, in het bijzonder matrixrepresentaties. Er is een zeer rijk verband tussen Lie-groepen en speciale functies dat nog steeds in ontwikkeling is.

1.2 Een resultaat van Galois

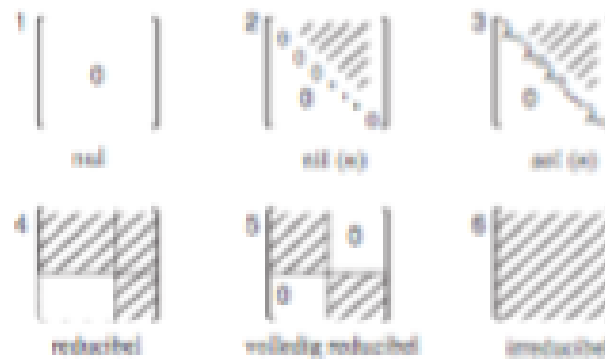
In 1830 ontwikkelde Galois methoden waarmee wiskundigen vragen konden oplossen waar ze het antwoord 2000 jaar of langer op schuldig hadden moeten blijven. Tot deze vragen behoorden de drie beroemde problemen van de oude Griekse landmeetkundigen: of het mogelijk was om met uitsluitend een liniaal en een passer

- een cirkel te kwadrateren,
- een hoek in drieën te delen,
- een kubus te verdubbelen.

Zijn werk hielp bij het oplossen van lang bestaande vergelijkingen van algebraïsche aard: of het mogelijk was om, uitsluitend met rekenkundige bewerkingen gecombineerd met de bewerking voor het vinden van radicalen, oplossingen voor

- derdegraadsvergelijkingen,
- vierdegraadsvergelijkingen,
- vijfdegraadsvergelijkingen,

te vinden. Dit gebied van de wiskunde, tegenwoordig Galois-theorie genoemd, levert nog steeds krachtige nieuwe resultaten op, zoals het leveren van antwoorden en oplossingen op de volgende vragen.



Figuur 8.1: Structuur van de reguliere representatie voor verschillende typen Lie-algebra's.

Voorbeeld De Lie-algebra $\mathfrak{o}(p, q)$ bestaat uit matrices van de vorm

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ p \\ \downarrow \\ \uparrow \\ q \\ \downarrow \end{matrix} \quad (8.3)$$

Dit is een $n \times n$ ($n = p + q$) matrixalgebra die $N = pq$ -dimensionaal is. De onafhankelijke vrijheidsgraden zijn de N onafhankelijke matrixelementen van de $p \times q$ -matrix A . De $n \times n$ -matrices commuteren alle onder matrixvermenigvuldiging. De groepsbewerking is equivalent met de optelling van de $p \times q$ -matrices. De reguliere representatie bestaat uit $N \times N$ -matrices, die alle N nul zijn.

2. **$\text{nil}(n)$ Strikt bovendriehoeks** In dit geval is de Lie-algebra nilpotent.

Voorbeeld We beschouwen de Lie-algebra opgespannen door de fotonoperatoren $a, a^\dagger$, en $I = [a, a^\dagger]$ of de isomorfe 3×3 -matrixalgebra (5.11). De reguliere representatie is een 3×3 -matrix

$$\text{Reg}(la + ra^\dagger + \delta I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} a^\dagger \\ a \\ I \end{matrix} \quad (8.4)$$

3. **$\text{sol}(n)$ Bovendriehoeks** In dit geval komen er op en boven de diagonaal niet-nulelementen voor. De algebra is oplosbaar.

Voorbeeld De algebra opgespannen door de fotontaloperator $\hat{N} = a^\dagger a$, creatie- en annihilatieoperatoren $a^\dagger$ en a , en hun commutator $I = [a, a^\dagger]$ is isomorf met de algebra die

12 Riemannse symmetrische ruimten

Bij de classificatie van de reële vormen van de enkelvoudige Lie-algebra's kwamen we deelruimten $\mathfrak{p}$ en $i\mathfrak{p}$ tegen waarop het Cartan-Killing inproduct negatief-definiet was ($i\mathfrak{p}$), of positief-definiet ($\mathfrak{p}$). In beide gevallen exponentiëren deze deelruimten tot algebraïsche variëteiten waarop de invariante metriek g_{ij} positief dan wel negatief definiet is.

Variëteiten met een definitie metriek zijn Riemannse ruimten. Deze ruimten zijn ook globaal symmetrisch in de zin dat alle punten er hetzelfde uitzien - omdat elk punt in de ruimte $\text{EXP}(\mathfrak{p})$ of $\text{EXP}(i\mathfrak{p})$ het beeld is van de oorsprong onder een of andere groepsbewerking. In dit hoofdstuk gaan we kort in op de eigenschappen van deze Riemannse globaal symmetrische ruimten.

12.1 Kort overzicht

Bij de behandeling van de groep $SL(2; \mathbb{R})$ zijn we drie symmetrische ruimten tegengekomen. Dat waren de compacte $S^2 \sim SU(2)/U(1)$, en zijn duale $H_{2,+}^2 = SL(2; \mathbb{R})/SO(2) = SU(1,1)/U(1)$, die het bovenste blad vormt van de twebladige hyperboloïde. 'Tussen' deze twee ruimten komt $H_1^2 = SL(2; \mathbb{R})/SO(1,1)$, de enkelbladige hyperboloïde voor. Deze ruimten zijn weergegeven in fig. 12.1.

Het Cartan-Killing inproduct in de lineaire vectorruimte $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{u}(1)$ is negatief-definiet. Dit wordt onder de EXponentiële functie afgebeeld op de Cartan-Killing-metriek op de ruimte $SU(2)/U(1) \sim S^2$, de bol. Op S^2 is de Cartan-Killing-metriek negatief-definiet. We kunnen dit net zo goed positief-definiet nemen. Onder deze metriek gaat de bol over in een Riemannse variëteit omdat ze een metriek heeft waarmee afstanden kunnen worden gemeten.

Het Cartan-Killing inproduct op $\mathfrak{su}(1,1) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{sl}(2; \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(2)$ is positief-definiet. Het beeldt een positief-definiëte metriek af op $H_{2,+}^2 = SU(1,1)/SO(2)$. Het bovenste blad van de twebladige hyperboloïde is topologisch equivalent met de vlakke ruimte $\mathbb{R}^2$, maar meetkundig niet: het heeft een intrinsieke kromming die kan worden berekend via zijn Cartan-Killing-metriek en de daarvan afgeleide krommingstensor.

Het interessantste aan deze ruimten is de enkelbladige hyperboloïde H_1^2 . Deze wordt verkregen door exponentiëren van H_1^2 . Het Cartan-Killing inproduct in de lineaire vectorruimte is indefiniet. Dus is de Cartan-Killing-metriek op de topologische ruimte $\text{EXP}[\mathfrak{su}(1,1) = \mathfrak{so}(1,1)] = SU(1,1)/SO(1,1)$ indefiniet. De ruimte is een pseudo-Riemannse variëteit. Bovendien is ze meervoudig samenhangend.

12.2 Globaal symmetrische ruimten

De drie gevallen voor A_1 uit de vorige paragraaf dienen als model voor de beschrijving van alle andere Riemannse symmetrische ruimten. Voor een compacte enkelvoudige Lie-algebra