ALEX VAN DEN BRANDHOF

DE KABOUTER FORMULE

Logische raadsels over gekleurde mutsen

2023 Prometheus Amsterdam

Voor Leonore, Johan en Filippa

Omslagontwerp Suzan Beijer
Omslagbeeld Marion Vrijburg
Foto auteur Eva Joan Samson
Zetwerk Elgraphic
www.uitgeverijprometheus.nl
ISBN 978 90 446 5379 3

1

DE GONG

Keizer Beulmans houdt zeven kabouters gevangen. Hij heeft twaalf mutsen: zes rode en zes blauwe. De kabouters krijgen allemaal één van de twaalf mutsen op hun hoofd. Niemand ziet zijn eigen mutskleur, maar wel die van alle anderen.

Nadat Beulmans drie kabouters een rode muts en vier kabouters een blauwe muts heeft opgezet, loopt hij naar een gong en zegt: ‘Ik sla straks op deze gong. Wie weet welke mutskleur hij heeft, mag na die slag opstaan en vertrekken.’ Nadat Beulmans op de gong heeft geslagen, blijven alle kabouters zitten. Een minuut later vervolgt Beulmans: ‘Ik sla zo dadelijk nog eens op de gong. Wie weet welke mutskleur hij heeft, mag dan opstaan en vertrekken.’ Zolang er niemand opstaat, herhaalt Beulmans elke minuut zijn oproep en zijn slag op de gong.

Op een gegeven moment staan alle kabouters op en lopen naar de uitgang (waar uiteraard een bewaker staat die verifieert of de kabouters niet bluffen). Wanneer gebeurt dat?

Beulmans heeft van elke kleur slechts zes mutsen. Daaruit kunnen de kabouters concluderen dat het is uitgesloten dat ze allemaal dezelfde mutskleur hebben. Omdat de roodgemutste kabouters twee rode en vier blauwe mutsen zien, en de blauwgemutste kabouters drie rode en drie blauwe, lijkt dat overbodige informatie: elke kabouter kan op grond van wat hij ziet al uitsluiten dat iedereen dezelfde mutskleur heeft.

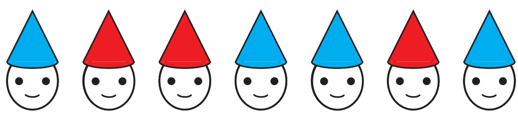
Toch is die informatie essentieel. Het is namelijk van cruciaal belang dat niet alleen elke kabouter weet dat beide mutskleuren voorkomen, maar ook dat elke kabouter weet dat iedereen dat weet, en dat elke kabouter weet dat iedereen weet dat iedereen dat weet. En ga zo maar door. Deze eigenschap staat in de vakliteratuur bekend als 'gemeenschappelijke kennis'.

Bekijk eerst eens de eenvoudige situatie met twee gevangen kabouters: één met een rode en één met een blauwe muts. Als ze weten dat het is uitgesloten dat beiden dezelfde kleur hebben, weet elke kabouter direct nadat de mutsen zijn verdeeld welke kleur hij heeft: ziet een kabouter rood, heeft hij zelf blauw, en omgekeerd.

Ook met drie kabouters is de situatie makkelijk. Als ze weten dat beide kleuren aanwezig zijn, zijn er maar twee mogelijkheden: twee kabouters hebben rood en één blauw, of twee kabouters hebben blauw en één rood. De kabouter die als enige een afwijkende kleur heeft, weet dan direct zijn kleur. Als die opstaat, kunnen de andere twee ook concluderen welke mutskleur ze hebben.

Met vier kabouters wordt het lastiger. Is de verdeling één om drie, zijn er geen problemen: degene die drie gelijk gekleurde mutsen ziet, kan opstaan en vertrekken – en de andere drie vervolgens ook. Is de verdeling twee om twee, dan wordt het ingewikkelder. Na de eerste slag op de gong blijven alle kabouters zitten. Een roodgemutste kabouter ziet immers één rode en twee blauwe mutsen, en kan daaruit geen conclusie over zijn eigen mutskleur trekken. Idem voor een blauwgemutste kabouter. Toch zijn de kabouters wel wat wijzer geworden na die eerste slag op de gong. Stel dat Ando en Bimbo de roodgemutste kabouters zijn, en Chouffe en Drintel de blauwgemutste. Ando redeneert als volgt: ‘Stel ik heb een blauwe muts. Dan zou Bimbo de enige kabouter zijn met een afwijkende mutskleur en zou zijn opgestaan.’ Bimbo is echter blijven zitten, waaruit Ando kan opmaken dat zijn gedachte (‘stel ik heb blauw’) fout is. Ando kan dan concluderen dat hij rood heeft. Bimbo redeneert net zo, en ook Chouffe en Drintel redeneren op vergelijkbare wijze. Dus als Beulmans zijn oproep herhaalt en voor de tweede keer op de gong slaat, staan alle kabouters op en vertrekken. Het feit dat vooraf bekend is dat beide mutskleuren vertegenwoordigd zijn, is onontbeerlijk: daardoor weet elke kabouter ook dat elke ándere kabouter weet dat beide mutskleuren aanwezig zijn.

In de situatie met zeven kabouters – drie met een rode en vier met een blauwe muts, zie figuur 1.1 – duurt het nog een gongslag langer voordat hun de vrijheid wacht. Stel dat Ando, Bimbo en Chouffe roodgemutst zijn, en Drintel, Eldri, Filius en Gopsie blauwgemutst. Ofschoon elke roodgemutste kabouter bij aanvang al weet dat er minstens twee rode mutsen zijn, weten zij dit niet van elkaar. Ando denkt: ‘Als ik blauw heb, zien Bimbo en Chouffe elk maar één



Figuur 1.1 Drie roodgemutste en vier blauwgemutste kabouters.

rode muts, en in dat geval zal Bimbo denken: "Als ik blauw heb, ziet Chouffe enkel blauwe mutsen, dus dan weet hij dat hijzelf rood heeft."' Als na de eerste slag op de gong niemand opstaat, weet Ando dat Bimbo weet dat Chouffe niet de enige is met een rode muts. En net zo weet Ando dat Chouffe weet dat Bimbo niet de enige roodgemutste kabouter is. (En Bimbo en Chouffe denken uiteraard precies zo.) Als Ando's gedachte ('stel ik heb blauw') juist zou zijn, dan hadden Bimbo en Chouffe na de tweede slag op de gong kunnen opstaan. Zij staan echter niet op. Ando weet dan dat zijn gedachte fout is en concludeert dat zijn muts rood is. Bimbo en Chouffe, die net zo redeneren, concluderen hetzelfde. Dus als Beulmans voor de derde keer op de gong slaat, staan Ando, Bimbo en Chouffe op. Prompt daarna weten Drintel, Eldri, Filius en Gopsie dat zij een blauwe muts dragen. Zij staan dan ook op, melden hun kleur aan de bewaker en zijn van Beulmans verlost.

Het aantal kabouters dat keizer Beulmans gevangenhoudt, hoeft natuurlijk niet zeven te zijn. Als er n kabouters zijn en Beulmans heeft $n - 1$ rode en $n - 1$ blauwe mutsen, dan weten de kabouters dat bij elke verdeling van de mutsen beide kleuren aanwezig zijn, en – heel belangrijk – ze weten ook dat elke andere kabouter dat weet. De vrijheid van de kabouters is dan altijd gegarandeerd. Hoeveel slagen op de gong zijn er nodig als Beulmans k kabouters een rode muts geeft en $n - k$ kabouters een blauwe?

Als na de eerste gongslag iedereen blijft zitten, dan weten de kabouters dat er van beide kleuren minstens twee mutsen aanwezig zijn. En als na de tweede gongslag niemand opstaat, weten ze dat er van beide kleuren minstens drie mutsen aanwezig zijn. Enzovoorts. Als $k < n - k$, dan staan de roodgemutste kabouters na de

k'de slag op de gong als eerste op. Als $k > n - k$, dan staan de blauwgemutste kabouters na de $(n - k)$'de slag op de gong als eerste op. Zijn er precies evenveel rode als blauwe mutsen, dan staan alle kabouters precies tegelijk op, en wel na de k'de slag op de gong.

*

Het vorige raadsel is een klassieker uit de logica. Het werd in de jaren dertig van de vorige eeuw bedacht door de Amerikaanse logicus en filosoof Alonzo Church, in een context met kleuters die tijdens het speelkwartier in de modder hebben zitten spelen. Sommigen hebben na afloop nog een modderklodder op hun voorhoofd, zonder dat zelf door te hebben. Church liet zien hoe ze met 'gemeenschappelijke kennis' kunnen uitmaken welke kleuters dat zijn.

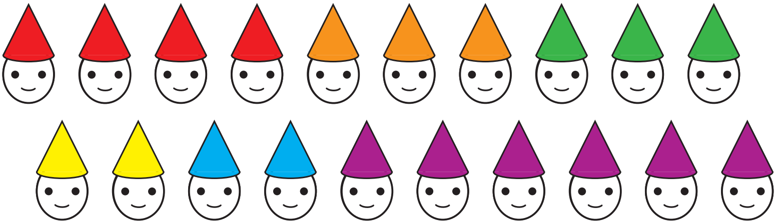
Kabouters met gekleurde mutsen of kleuters met al dan niet besmeurde voorhoofden: het is natuurlijk om het even. Liefhebbers van logische puzzels bedachten varianten op het raadsel van Church. Het is de moeite waard om na het juweeltje van Church na te denken over het volgende probleem, waarbij er méér dan twee mutskleuren in het spel zijn.

Keizer Beulmans houdt twintig kabouters gevangen. Hij heeft mutsen in allerlei kleuren die bij de kabouters niet bekend zijn. De kabouters weten zelfs niet hoeveel verschillende mutskleuren er in omloop zijn. Wel hebben ze uitstekende ogen, zodat ze alle kleuren van elkaar kunnen onderscheiden en elke kleur correct kunnen benoemen.

Elke kabouter krijgt een muts op het hoofd gezet: vier kabouters krijgen een rode muts, drie krijgen een oranje, twee een gele, drie een groene, twee een blauwe en zes een paarse. Niemand ziet zijn eigen mutskleur, maar wel die van alle anderen. Wijzend op een gong zegt Beulmans: 'Elke minuut sla ik op deze gong. Zodra iemand zijn eigen mutskleur weet, mag hij bij de eerstvolgende slag op de gong opstaan en vertrekken. Ik heb de mutskleuren zorgvuldig uitgekozen en verzeker jullie: door te kijken en logisch na te denken, kunnen jullie allemaal vrijkomen!'
Na hoeveel slagen op de gong zijn alle kabouters vertrokken? En hoe hebben ze hun mutskleur kunnen achterhalen?

De kabouters zullen zich afvragen of een zekere kleur slechts eenmaal kan voorkomen. Stel bijvoorbeeld dat er maar één geelgemutste kabouter is. Kan die kabouter zijn mutskleur dan achterhalen? Nee, want Beulmans heeft de kabouters niet verteld welke mutskleuren er allemaal in het spel zijn. Die ene geelgemutste kabouter kan dus nooit weten dat zijn muts geel is.

Beulmans, die de mutsen heeft verdeeld zoals in figuur 1.2, heeft de kabouters echter verzekerd dat ze door kijken en nadenken vrij kunnen komen. De kabouters concluderen daaruit dat elke voorkomende kleur ten minste twee maal voorkomt. Er zijn twee geelgemutste kabouters. Stel dat dit Ando en Bimbo zijn. Ando ziet slechts één gele muts (die van Bimbo) en kan dus concluderen dat de tweede gele muts op zijn eigen hoofd moet zitten. Ando staat na de eerste slag op de gong dus op en verlaat de zaal.



Figuur 1.2 Twintig kabouters met mutsen in zes verschillende kleuren.

Bimbo denkt natuurlijk precies hetzelfde, en staat ook op. Tegelijk met Ando en Bimbo verlaten ook de twee blauwgemutste kabouters de zaal na de eerste slag op de gong.

De vier roodgemutste kabouters, de drie oranjegemutste kabouters, de drie groengemutste kabouters en de zes paarsgemutste kabouters zijn dan nog in de zaal. Wat gebeurt er voor de tweede slag op de gong?

Stel dat Chouffe, Drintel en Eldri de drie oranjegemutste kabouters zijn. Chouffe kijkt om zich heen en stelt vast dat Drintel en Eldri de enige kabouters met oranje mutsen zijn. Waarom is Drintel niet al bij de eerste slag de zaal uit gelopen? Als Drintel maar één oranje muts had gezien, had hij (redenerend zoals de kabouters met gele en blauwe mutsen deden) al bij de eerste slag kunnen vaststellen dat zijn eigen muts oranje is en kunnen weglopen. Omdat hij dat niet deed, moet er een derde oranje muts zijn. Het kan niet anders dan dat Chouffe die op zijn eigen hoofd heeft. Na de tweede slag verlaat Chouffe dus de zaal, net als Drintel en Eldri, voor wie de situatie identiek is. De drie kabouters met groene mutsen redeneren net zo, dus die lopen ook weg.

Nu zijn de vier roodgemutste kabouters (stel, dit zijn Filius, Gopsie, Holly en Isaac) en de zes paarsgemutste kabouters nog aanwezig. Wat gebeurt er voor de derde slag op de gong?

Filius ziet dat Gopsie, Holly en Isaac de enige drie kabouters zijn met een rode muts. Waarom is Gopsie niet al bij de tweede slag de zaal uit gegaan? Als Gopsie maar twee rode mutsen had gezien, had hij al bij de tweede slag kunnen vaststellen dat zijn eigen muts rood is en kunnen weglopen. Omdat hij dat niet deed, moet er een vierde rode muts zijn. Die moet dan wel op Filius' hoofd zitten. Na de derde slag verlaat Filius dus de zaal, net als Gopsie, Holly en Isaac.

Na de derde slag zijn alleen nog de zes paarsgemutste kabouters aanwezig. Ze weten dat er meer dan vier paarse mutsen zijn, anders waren ze al vertrokken. Kunnen er vijf paarse mutsen zijn? Nee, want dan zou één kabouter een afwijkende mutskleur hebben en die situatie was al uitgesloten. Dat betekent dat de zes overgebleven kabouters nu zeker weten dat hun mutsen allemaal dezelfde kleur hebben. Als Beulmans voor de vierde keer op de gong slaat, kunnen zij dus ook opstaan en vertrekken.

Bij dit mutsprobleem deelde Beulmans mutsen uit in zes verschillende kleuren. Dat aantal doet er in feite niet toe, als het maar niet meer is dan de helft van het aantal kabouters. Zolang elke kleur ten minste twee maal voorkomt, de kabouters tomaatrood van karmijnrood kunnen onderscheiden en olijfgroen van cactusgroen, komt er voor elke kabouter een moment waarop hij kan opstaan. In het algemeen geldt: als er in het begin precies k kabouters zijn met een identieke kleur muts, dan verlaten die k kabouters de zaal na uiterlijk $k - 1$ slagen op de gong.

2

HET SCHOOLBORD

Keizer Beulmans houdt twee kabouters gevangen. Aan de muur hangt een schoolbord. Beulmans geeft de kabouters een muts waarop een geheel getal is geborduurd: op de ene muts het getal 2, op de andere 5. Elke kabouter ziet het getal op de muts van de ander, maar kent het getal op zijn eigen muts niet. Op het schoolbord schrijft Beulmans twee getallen: 6 en 7.
Op dag 1 van de gevangenschap zegt Beulmans tegen de kabouters: ‘Jullie mutsnummers zijn niet-negatieve gehele getallen en de som is een van de getallen die op het bord staan. Als iemand van jullie zijn eigen getal kent, mag hij het zeggen. Als het juist is, laat ik jullie allebei vrij.’ Beide kabouters zwijgen.
Op de dagen hierna spreekt Beulmans opnieuw die laatste twee zinnen uit (eenmaal per dag): ‘Als iemand van jullie zijn eigen getal kent, mag hij het zeggen. Als het juist is, laat ik jullie allebei vrij.’ Op dag 2, 3 en 4 zeggen de kabouters nog steeds niks, maar op dag 5 roept een van de kabouters zijn mutsnummer. Welke kabouter heeft zijn mutsnummer kunnen achterhalen en hoe deed hij dat?